

Extensions algébriques de corps - TD 3

Nous rappelons que les racines du polynôme $x^n - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ sont les nombres complexes $e^{2k\pi i/n} = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) i$ pour $k = 1, \dots, n$.

1. Si $n \in \mathbb{N}$, montrer que \sqrt{n} et \sqrt{ni} sont algébriques sur \mathbb{Q} .
2. Si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de l'unité, montrer que z est algébrique sur \mathbb{Q} .
3. Calculer $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ et donner une base de $\mathbb{Q}(a)$ comme \mathbb{Q} -espace vectoriel pour :
 - (i) $a = \sqrt{3}$.
 - (ii) $a = \sqrt[3]{2}$.
 - (iii) $a = \sqrt[4]{2}$.
 - (iv) $a = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
 - (v) $a = \sqrt{3}i$.
4. Calculer $[\mathbb{Q}(a, b) : \mathbb{Q}]$ et donner une base de $\mathbb{Q}(a, b)$ comme \mathbb{Q} -espace vectoriel pour :
 - (i) $a = \sqrt{3}$ et $b = \sqrt{2}$.
 - (ii) $a = \sqrt{3}$ et $b = i$.
 - (iii) $a = \sqrt[3]{2}$ et $b = \sqrt{2}$.
 - (iv) $a = \sqrt[3]{2}$ et $b = i$.
 - (v) $a = \sqrt[4]{2}$ et $b = \sqrt{2}$.
 - (vi) $a = \sqrt[4]{2}$ et $b = i$.
 - (vii) $a = e^{2\pi i/3}$ et $b = \sqrt{2}$.
 - (viii) $a = e^{2\pi i/3}$ et $b = i$.
 - (ix) $a = \sqrt{3}i$ et $b = \sqrt{3}$.Dans tous les cas ci-dessus, montrer que $\mathbb{Q}(a, b) = \mathbb{Q}(a + b)$.
Quand est-ce que $\mathbb{Q}(a, b) = \mathbb{Q}(ab)$?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver les polynômes minimaux de \sqrt{n} et de \sqrt{ni} sur \mathbb{Q} .
6. Soit $z \in \mathbb{Q}(i)$. Montrer que z est algébrique sur \mathbb{Q} et trouver son polynôme minimal.
7. En utilisant le fait que $e^{2\pi i/9} = \cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{9}\right) i$, déterminer le polynôme minimal de $\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)$. Montrer que $[\mathbb{Q}(\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right)) : \mathbb{Q}] = 3$.
8. Soit K/F et $a, b \in K$. Si a est algébrique sur F et b est algébrique sur $F(a)$, alors b est algébrique sur F .
9. Soit K/F et $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$. Si c_1, c_2, \dots, c_n sont des éléments algébriques sur F , alors $F(c_1, c_2, \dots, c_n)/F$ est finie et $F[c_1, c_2, \dots, c_n] = F(c_1, c_2, \dots, c_n)$.